CANTIDAD DE MOVIMIENTO
CHOQUE

<u>Apuntes</u>

CANTIDAD DE MOVIMIENTO LINEAL (MOMENTO LINEAL)

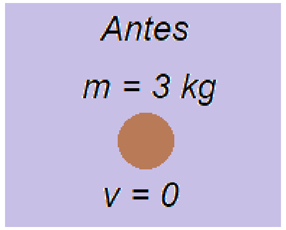
Definición: $\boxed{\vec{p} = m\vec{v}}$

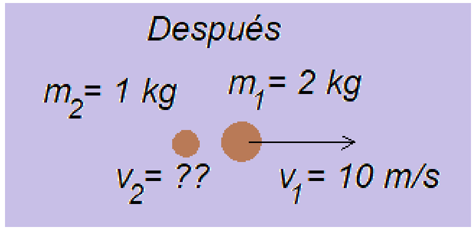
$kg \quad m/s$

La cantidad de movimiento es una cantidad útil para describir interacciones entre cuerpos cuando no se conoce bien el tipo de fuerza con que éstos interactúan. Por ejemplo, en colisiones.

Unidades: $kg\,\dfrac{m}{s}$ $\longrightarrow$ No tiene un nombre especial

Ejemplo 1 (Para discutir): Un cuerpo de masa $m = 3\ kg$ que está en reposo estalla en dos fragmentos. Uno de los fragmentos, de masa $m_1 = 2\ kg$ sale hacia la derecha con una rapidez $v_1 = 10\ m/s$. ¿Con qué velocidad saldrá el otro fragmento? ¿Podemos resolver este problema utilizando la ley de conservación de la energía mecánica?





Ejemplo 2 (Para discutir): Un arquero de 60 kg está parado sobre hielo sin fricción y lanza horizontalmente una flecha de masa $m = 0.5\ kg$ con una velocidad de 50 m/s. ¿Se moverá el arquero luego del lanzamiento? ¿Podemos resolver este problema utilizando la ley de conservación de la energía mecánica?

Ejemplo 3 (Para discutir): Un bloque de masa $M = 20\ kg$ está en reposo sobre una superficie horizontal sin rozamiento. Se lanza contra el bloque una bola blanda de 5 kg de masa, que incide horizontalmente sobre el bloque con una velocidad de 40 m/s. Tras el choque ambos cuerpos permanecen pegados. ¿Cómo se moverá el sistema tras la colisión? ¿Podemos resolver este problema utilizando la ley de conservación de la energía mecánica?

Segunda Ley de Newton (Formulación Original)

$$\boxed{\sum \vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}}$$

Newton, *Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica*, 1687.
Mutationem motus proportionalem esse vi motrici impressæ, & fieri secundum lineam rectam qua vis illa imprimitur.
El cambio de movimiento es directamente proporcional a la fuerza motriz impresa y ocurre según la línea recta a lo largo de la cual aquella fuerza se imprime.

Nótese que…

$$\sum \vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt}$$

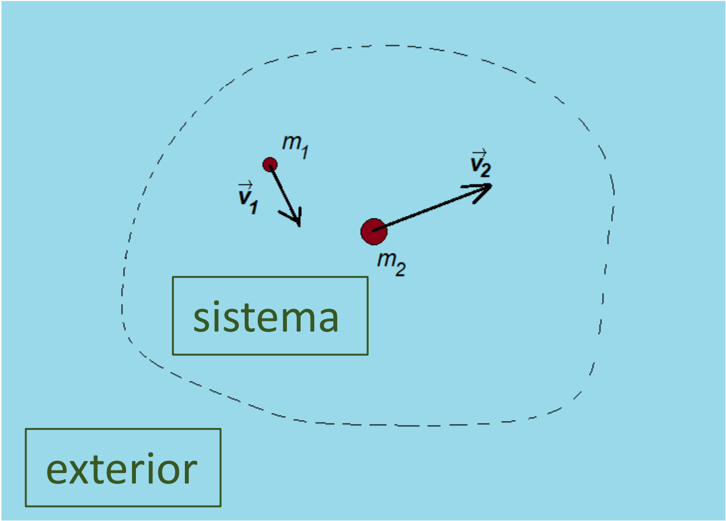
Y, si la masa permanece constante…

$$\longrightarrow \sum \vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a} \longrightarrow$$

… que es la forma en que habíamos visto la segunda ley anteriormente…

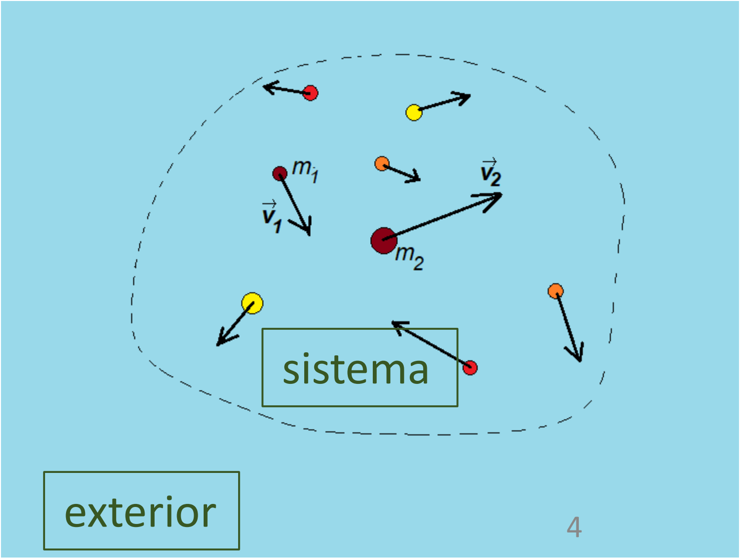
Cantidad de Movimiento Total para un Sistema de 2 Partículas

$$\vec{P} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2$$



Cantidad de Movimiento Total para un Sistema de *N* partículas

$$\vec{P} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \cdots + \vec{p}_N = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 + \cdots + m_N\vec{v}_N$$



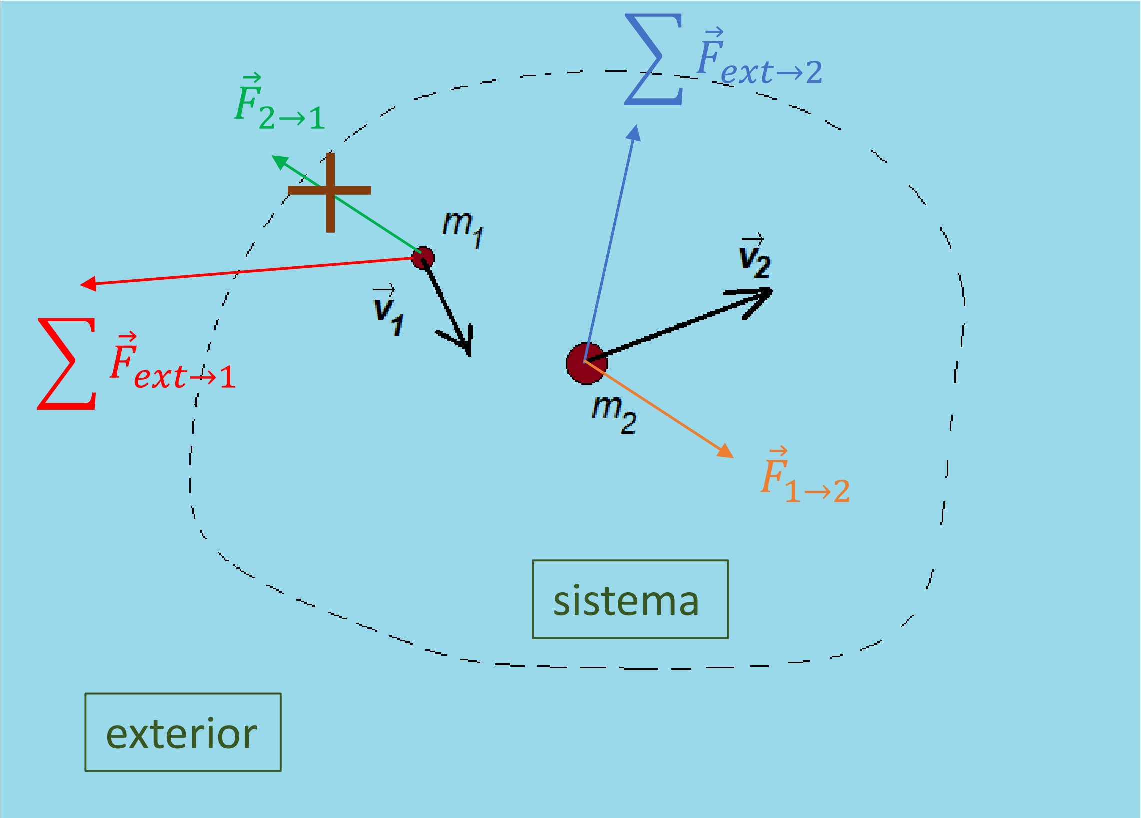
Variación de la Cantidad de Movimiento Total para un Sistema de Partículas

Desarrollaremos para un sistema de dos partículas:

$$\vec{P} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2$$

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \frac{d\vec{p}_1}{dt} + \frac{d\vec{p}_2}{dt} = \sum \vec{F}_{\rightarrow 1} + \sum \vec{F}_{\rightarrow 2}$$

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \sum \vec{F}_{ext\rightarrow 1} + \vec{F}_{2\rightarrow 1} + \sum \vec{F}_{ext\rightarrow 2} + \vec{F}_{1\rightarrow 2}$$



Pero sabemos, por el Principio de Acción y Reacción, que

$$\vec{F}_{1\rightarrow 2} = -\vec{F}_{2\rightarrow 1}$$

(igual módulo, sentidos opuestos)

Entonces…

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \sum \vec{F}_{ext\rightarrow 1} + \sum \vec{F}_{ext\rightarrow 2}$$

$$\boxed{\frac{d\vec{P}}{dt} = \sum \vec{F}_{ext}}$$

En particular, si el sistema está aislado (no hay fuerzas externas), o si la resultante de las fuerzas externas es nula…

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = 0$$

$$\vec{P} = cte. \quad \text{(en el tiempo)}$$

$$\boxed{\vec{P}_f = \vec{P}_i}$$

Variación de la Cantidad de Movimiento Total para un Sistema de Partículas

Lo que desarrollamos anteriormente para un sistema compuesto de dos partículas podemos extenderlo a un sistema con un número cualquiera (*N*) de partículas:

Momento lineal total del sistema

$$\vec{P} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \cdots + \vec{p}_N$$

Momentos de las partículas individuales

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \frac{d\vec{p}_1}{dt} + \frac{d\vec{p}_2}{dt} + \cdots + \frac{d\vec{p}_N}{dt} = \sum \vec{F}_{\rightarrow 1} + \sum \vec{F}_{\rightarrow 2} + \cdots + \sum \vec{F}_{\rightarrow N}$$

Fuerzas netas sobre cada partícula

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \overbrace{\sum \vec{F}_{ext\rightarrow 1} + \cancel{\vec{F}_{2\rightarrow 1}} + \cdots + \cancel{\vec{F}_{N\rightarrow 1}}} + \overbrace{\sum \vec{F}_{ext\rightarrow 2} + \cancel{\vec{F}_{1\rightarrow 2}} + \cdots + \cancel{\vec{F}_{N\rightarrow 2}}} + \cdots + \overbrace{\sum \vec{F}_{ext\rightarrow N} + \cancel{\vec{F}_{1\rightarrow N}} + \cancel{\vec{F}_{2\rightarrow N}} + \cdots}$$

$$\longrightarrow \quad \frac{d\vec{P}}{dt} = \sum \vec{F}_{ext\rightarrow 1} + \sum \vec{F}_{ext\rightarrow 2} + \cdots + \sum \vec{F}_{ext\rightarrow N} = \sum \vec{F}_{ext}$$

En particular, si el sistema está <u>aislado</u> (no hay fuerzas externas), <u>o si la resultante de las fuerzas externas es nula</u>…

$$\longrightarrow \quad \frac{d\vec{P}}{dt} = 0 \quad \longrightarrow \quad \vec{P} = cte. \quad \text{(en el tiempo)}$$

$$\boxed{\vec{P}_f = \vec{P}_i}$$

Ley de Conservación del Momento Lineal

"Cuando la fuerza neta externa que actúa sobre un sistema es cero, su momento lineal total permanece constante"

$$\sum \vec{F}_{ext} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \vec{P} = cte.$$

$$\vec{P}_f = \vec{P}_i$$

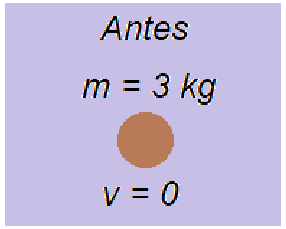
Note que es una igualdad vectorial. En el caso 2-D (o 3-D) corresponde a 2 (o 3) igualdades:

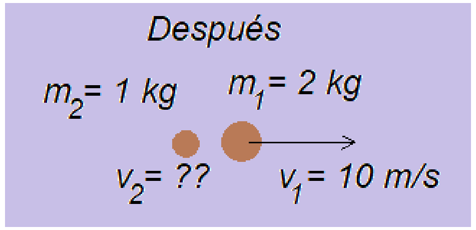
$$P_{f,x} = P_{i,x} \qquad P_{f,y} = P_{i,y} \qquad P_{f,z} = P_{i,z}$$

Ley de Conservación del Momento Lineal - Ejemplos

Retomemos algunos de los ejemplos planteados al principio…

Ejemplo 1. Un cuerpo de masa $m = 3\ kg$ que está en reposo estalla en dos fragmentos. Uno de los fragmentos, de masa $m_1 = 2\ kg$ sale hacia la derecha con una rapidez $v_1 = 10\ m/s$. ¿Con qué velocidad saldrá el otro fragmento? ¿Podemos resolver este problema utilizando la ley de conservación de la energía mecánica?





Respuesta. Este problema no puede resolverse utilizando los conceptos de conservación de la energía mecánica, ya que, durante la explosión, hay cierta cantidad de energía no-mecánica (energía interna) que se transforma en energía cinética (mecánica). En otras palabras, existe un proceso en el que intervienen fuerzas no conservativas cuya naturaleza desconocemos.

Pero podemos resolverlo utilizando los conceptos de conservación del momento lineal …

Consideraremos que el peso de la(s) partícula(s) no interviene en el problema. Aún cuando interviniese, asumiremos que el tiempo que transcurre entre la situación inicial y la final es tan breve que el peso no modifica las velocidades de las partículas.

Entonces:

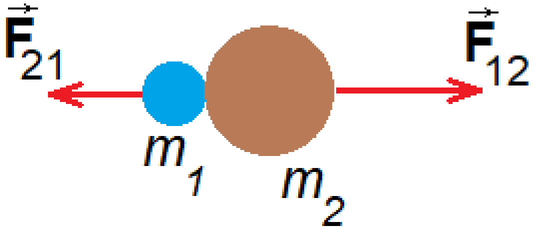
$$\vec{P}_f = \vec{P}_i \longrightarrow P_{f,x} = P_{i,x} \longrightarrow p_{f,x}^{(1)} + p_{f,x}^{(2)} = p_{i,x}^{(1+2)}$$

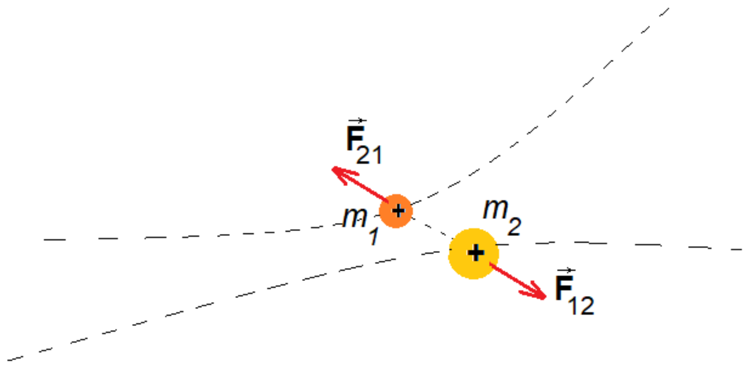
$$\longrightarrow m_1 v_1 + m_2 v_2 = m v_0 \longrightarrow 2kg\ 10\frac{m}{s} + 1kg\ v_2 = 3\ kg\ 0\ m/s \longrightarrow v_2 = \frac{-20\ kg\ m\ /s}{1\ kg} = -20\ m/s$$

Pregunta. ¿Cuánta energía se libera durante la explosión? (Suponiendo que toda la energía interna se transformó en energía cinética de las partículas). ***Respuesta.*** 300 J.

Colisiones

El término **colisión** representa un evento durante el que dos partículas se acercan una a la otra e interactúan.





Las partículas interactúan mediante algún tipo de fuerza (de contacto o a distancia).

Si el sistema formado por las partículas que colisionan está aislado,
el momento lineal total del sistema se conserva

$$\vec{P}_f = \vec{P}_i$$

En cambio, la energía cinética total puede o no conservarse. Dependiendo de esto, se pueden clasificar los tipos de colisión:

COLISIONES

- ELÁSTICAS → Se conservan $\vec{P}$ y E_k → Ejemplo: bolas de billar (aprox.)
- INELÁSTICAS → Se conserva $\vec{P}$, pero no E_k
  - (PARCIALMENTE) INELÁSTICAS
  - COMPLETAMENTE INELÁSTICAS → Los cuerpos permanecen unidos tras el choque

Tipos de Colisiones

COLISIONES

ELÁSTICAS

Se conservan $\vec{P}$ y E_k

Ejemplo: bolas de billar (aprox.)

INELÁSTICAS

Se conserva $\vec{P}$, pero no E_k

(PARCIALMENTE) INELÁSTICAS

COMPLETAMENTE INELÁSTICAS

Los cuerpos permanecen unidos tras el choque

Las colisiones **elásticas** y las **completamente inelásticas** constituyen casos extremos cuando se considera la variación de la energía cinética. El caso más general es el de colisiones parcialmente inelásticas (inelásticas, a secas):

ELÁSTICAS

$\Delta E_k = 0$

INELÁSTICAS

COMPLETAMENTE INELÁSTICAS

$|\Delta E_k| = max$

Colisiones – Ejemplos en Una Dimensión

Ejemplo 4. Un deslizador de masa $m_1 = 1.25\ kg$ se mueve con una velocidad de 3.62 m/s sobre una vía plana y sin fricción, chocando después con otro deslizador de masa $m_2 = 2.30\ kg$ que inicialmente está en reposo. Hallar las velocidades finales de ambos deslizadores si la colisión es **(a)** elástica; **(b)** completamente inelástica.

Respuesta. (a) En una colisión elástica se conservan el momento y la energía cinética. Suponemos que el problema es 1D (los deslizadores están sobre una vía). Sean v_1^i y v_2^i las velocidades iniciales, y v_1^f y v_2^f las velocidades finales de los cuerpos 1y 2, respectivamente.

Por conservación de $\vec{P}$:

$$m_1 v_1^i + m_2 v_2^i = m_1 v_1^f + m_2 v_2^f \longrightarrow 1.25kg \cdot 3.62\frac{m}{s} + 2.30kg \cdot 0\frac{m}{s} = 1.25kg \cdot v_1^f + 2.30kg \cdot v_2^f$$

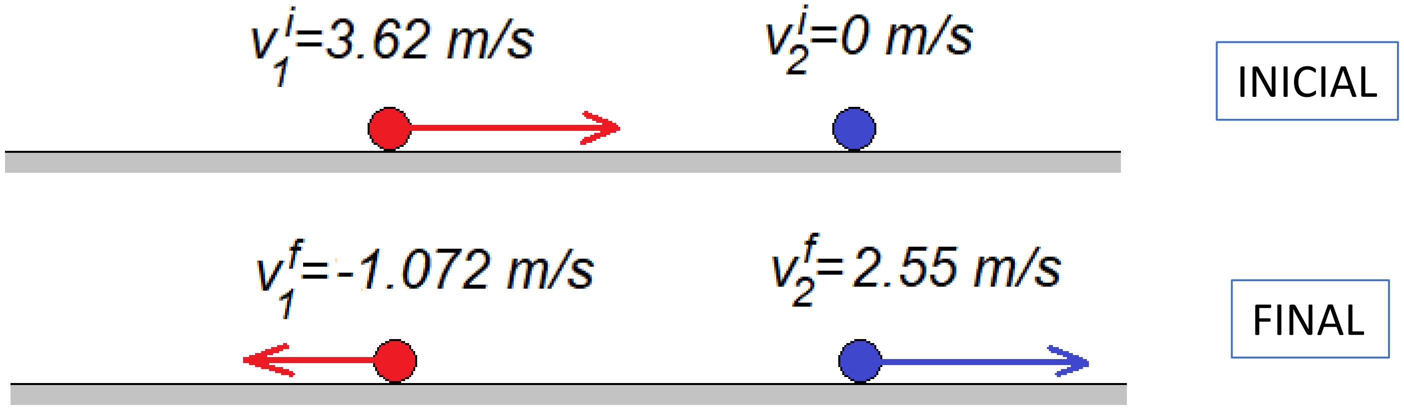
Por conservación de E_k:

$$\frac{1}{2}m_1\left(v_1^i\right)^2 + \frac{1}{2}m_2\left(v_2^i\right)^2 = \frac{1}{2}m_1\left(v_1^f\right)^2 + \frac{1}{2}m_2\left(v_2^f\right)^2 \longrightarrow \frac{1}{2}\cdot 1.25kg \cdot \left(3.62\ \frac{m}{s}\right)^2 + \frac{1}{2}\cdot 2.30kg \cdot \left(0\ \frac{m}{s}\right)^2 = \frac{1}{2}1.25kg\left(v_1^f\right)^2 + \frac{1}{2}2.30kg\left(v_2^f\right)^2$$

Lo anterior forma un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas. Puede resolverse despejando una de las incógnitas de la ecuación de arriba y reemplazando en la de abajo. El procedimiento no es del todo sencillo, se debe operar con una ecuación cuadrática. Finalmente se obtiene:

$$v_1^f = -1.072\ m/s$$

$$v_2^f = 2.55\ m/s$$



Colisiones – Ejemplos en Una Dimensión

Respuesta. (b) En una colisión *inelástica* se conserva el momento, pero no la energía cinética. Si la colisión es *completamente inelástica*, ambos cuerpos quedan unidos tras la colisión. Sean v_1^i y v_2^i las velocidades iniciales, y v_1^f y v_2^f las velocidades finales de los cuerpos 1 y 2, respectivamente.

Por conservación de $\vec{P}$:

$$m_1 v_1^i + m_2 v_2^i = m_1 v_1^f + m_2 v_2^f$$

$$\longrightarrow \quad 1.25kg \cdot 3.62\frac{m}{s} + 2.30kg \cdot 0\frac{m}{s} = 1.25kg \cdot v_1^f + 2.30kg \cdot v_2^f$$

Dado que la colisión es completamente inelástica:

$$v_2^f = v_1^f$$

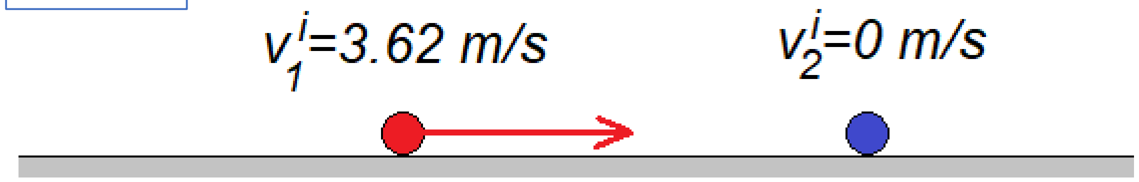
(ambos cuerpos se mueven juntos tras el choque)

$$1.25kg \cdot 3.62\frac{m}{s} + 2.30kg \cdot 0\frac{m}{s} = 1.25kg \cdot v_1^f + 2.30kg \cdot v_1^f$$

$$4.525\ kg \cdot \frac{m}{s} = 3.55kg \cdot v_1^f$$

$$v_1^f = v_2^f = 1.27\ m/s$$

INICIAL



FINAL

Colisiones en Dos Dimensiones

La conservación del momento es una relación vectorial, $\vec{P}_f = \vec{P}_i$

En un problema de choque en dos dimensiones *(x,y)*, la igualdad vectorial anterior corresponde a dos igualdades escalares: $P_{f,x} = P_{i,x}$ y $P_{f,y} = P_{i,y}$

Para la colisión de dos partículas de masas m_1 y m_2, con velocidades iniciales $\vec{v}_1^i = (v_{1,x}^i; v_{1,y}^i)$ y $\vec{v}_2^i = (v_{2,x}^i; v_{2,y}^i)$, y cuyas velocidades finales son $\vec{v}_1^f = (v_{1,x}^f; v_{1,y}^f)$ y $\vec{v}_2^f = (v_{2,x}^f; v_{2,y}^f)$, las ecuaciones de conservación de momento resultan:

$$P_{f,x} = P_{i,x}$$

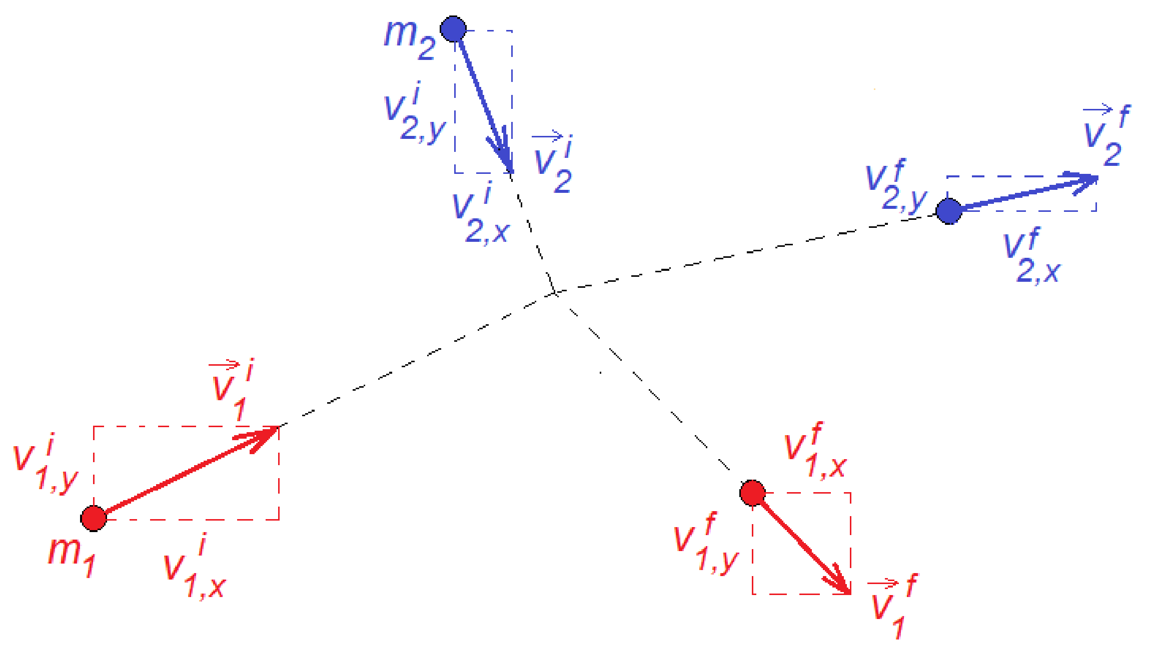
$$\downarrow$$

$$m_1 v_{1,x}^f + m_2 v_{2,x}^f = m_1 v_{1,x}^i + m_2 v_{2,x}^i$$

$$P_{f,y} = P_{i,y}$$

$$\downarrow$$

$$m_1 v_{1,y}^f + m_2 v_{2,y}^f = m_1 v_{1,y}^i + m_2 v_{2,y}^i$$

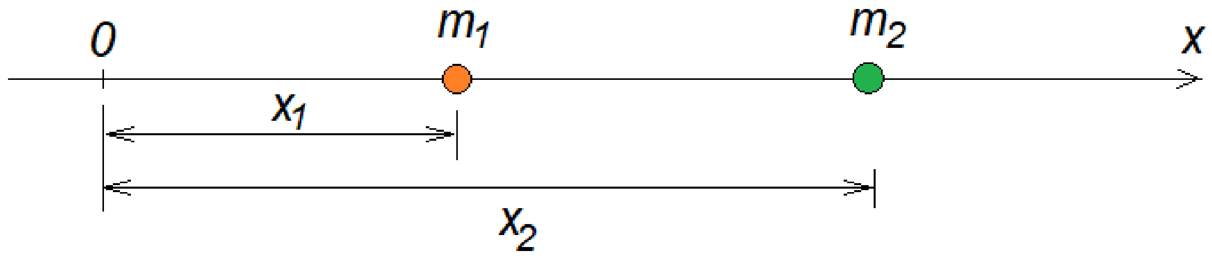


Centro de Masa

La posición del centro de masa de un sistema se describe como la *posición promedio* de la masa del sistema.

Centro de Masa para un Sistema de Dos Partículas

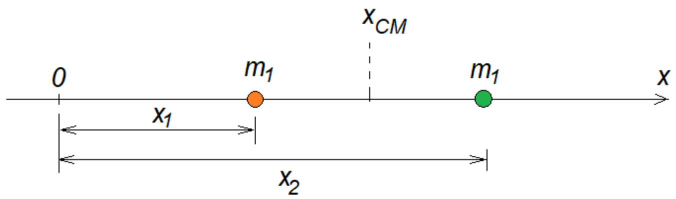
Consideremos dos partículas de masas m_1 y m_2. Sea el eje *x* la línea recta que pasa por ambas partículas, y sean x_1 y x_2 las coordenadas de las partículas a lo largo del eje:



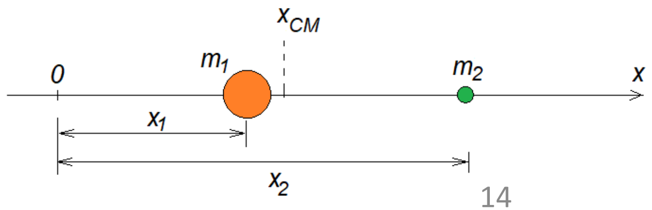
La posición del centro de masa x_{CM} se define como: $\boxed{x_{CM} = \dfrac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}}$

Posición intermedia

Note que, si $m_1 = m_2$: $$x_{CM} = \frac{m_1 x_1 + m_1 x_2}{m_1 + m_1} = \frac{m_1 (x_1 + x_2)}{2m_1} = \frac{x_1 + x_2}{2}$$



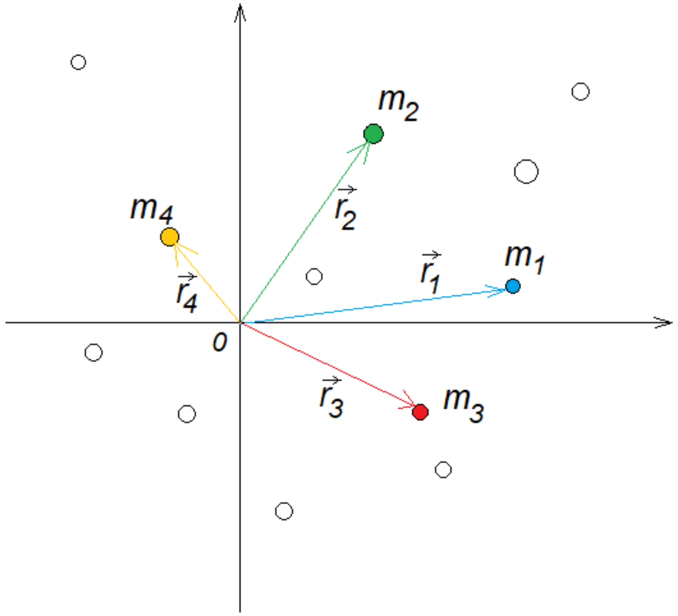
Si una de las masas es mucho mayor que la otra (por ej, $m_1 \gg m_2$): $$x_{CM} = \frac{m_1 x_1 + \cancel{m_2 x_2}}{m_1 + \cancel{m_2}} \approx \frac{m_1 x_1}{m_1} = x_1$$



El CM se encontrará más cerca de la partícula con mayor masa

Centro de Masa para un Sistema de N Partículas Puntuales

Sean *N* partículas puntuales de masas $m_1, m_2, \ldots, m_N$ en las posiciones $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \ldots, \vec{r}_N$:

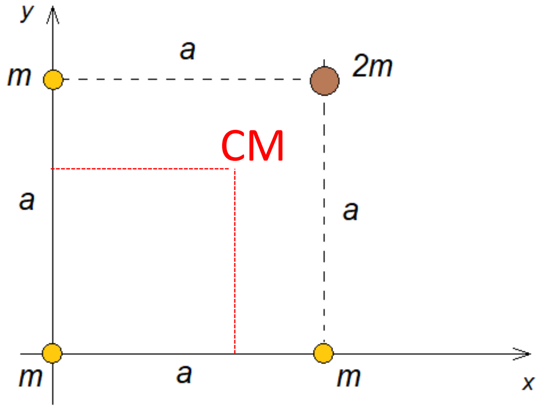


La posición del centro de masa se define como:

$$\boxed{\vec{r}_{CM} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + \cdots + m_N\vec{r}_N}{m_1 + m_2 + \cdots + m_N} = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i\vec{r}_i}{\sum_{i=1}^{N} m_i} = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i\vec{r}_i}{M}}$$

(*M* es la masa total del sistema)

Ejemplo 5. Hallar la posición del centro de masas para la distribución de partículas mostrada en la siguiente Figura.



Respuesta. Los vectores posición de las partículas de masa *m* son: $\vec{r}_1 = (0;0)$, $\vec{r}_2 = (0;a)$, $\vec{r}_3 = (a;0)$

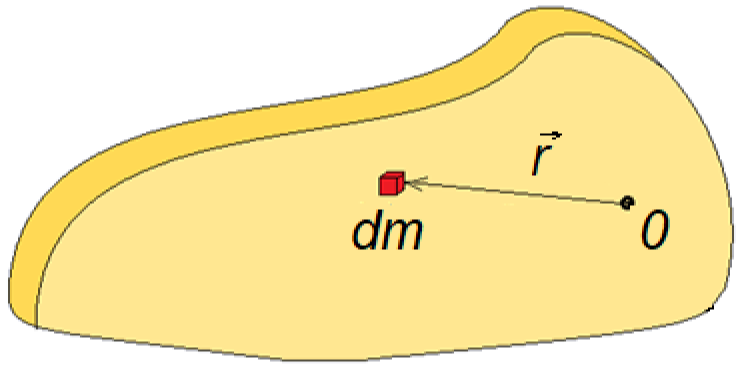
El vector posición de la partícula de masa *2m* es: $\vec{r}_4 = (a;a)$

La posición del centro de masa será:

$$\vec{r}_{CM} = \frac{m\cdot(0;0) + m\cdot(0;a) + m\cdot(a;0) + 2m\cdot(a;a)}{m+m+m+2m} = \frac{(3ma;3ma)}{5m} = (0.6a;0.6a)$$

Centro de Masa para un Objeto Extenso

Consideremos un objeto extenso, dividido en elementos diferenciales de masa *dm*:



En la expresión para calcular en centro de masa, debemos reemplazar las masas puntuales m_i por los elementos diferenciales de masa dm, y la suma por una integral:

$$\vec{r}_{CM} = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i}{M} \longrightarrow \boxed{\vec{r}_{CM} = \frac{\int_{cuerpo} \vec{r}\, dm}{M}}$$

(Fórmula del CM para un sistema de partículas puntuales)

(Fórmula del CM para un cuerpo extenso)

Movimiento de un Sistema de Partículas

Partiendo de la definición de CM para un sistema de partículas…

$$\vec{r}_{CM} = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i}{M} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i$$

… y, derivando, …

$$\vec{v}_{CM} = \frac{d\vec{r}_{CM}}{dt} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{v}_i \longrightarrow M\vec{v}_{CM} = \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{v}_i = \sum_{i=1}^{N} \vec{p}_i = \vec{P}$$

la cantidad de movimiento lineal total del sistema es igual a la de una sola partícula de masa M que se mueve con una velocidad $\vec{v}_{CM}$

… y derivando otra vez …

$$\vec{a}_{CM} = \frac{d\vec{v}_{CM}}{dt} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{a}_i = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i \longrightarrow M\vec{a}_{CM} = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i$$

pero, como demostramos anteriormente, en la suma anterior las fuerzas internas se cancelan (porque forman pares acción-reacción), y obtenemos finalmente:

$$\boxed{M\vec{a}_{CM} = \sum \vec{F}_{ext}}$$

Segunda ley de Newton para un sistema de partículas

El centro de masa se mueve como una partícula imaginaria de masa *M* bajo la influencia de la fuerza externa resultante en el sistema.